Luminița Curtui

Memorator de matematică

Algebră

pentru clasele 9-12

Booklet
București, 2020

Cuprins

1. Elemente de logică matematică 3
1.1. Enunţ. Propoziţie. Valoare de adevăr 3
1.2. Operaţii logice elementare 3
1.2.1. Negaţia propoziţiei 3
1.2.2. Conjuncţia propoziţiilor 4
1.2.3. Disjuncţia propoziţiilor 4
1.2.4. Implicaţia propoziţiilor 4
1.2.5. Echivalenţa propoziţiilor 5
1.2.6. Formule logice 5
1.3. Predicat. Cuantificatori 6
1.3.1. Definiţia noţiunilor de predicat şi cuantificatori 6
1.3.2. Reguli de negaţie 6
1.3.3. Predicate unare 7
1.3.4. Predicate binare 7
1.4. Corelarea elementelor de logică matematică cu relaţii şi operaţii cu mulţimi 7
1.4.1. Mulţimi 7
1.4.2. Operaţii cu mulţimi 8
1.5. Condiţii necesare. Condiţii suficiente 10
1.5.1. Teoremă. Teoremă reciprocă 10
1.5.2. Condiţie necesară şi suficientă 11
1.5.3. Condiţii necesare, dar nu şi suficiente 12
1.5.4. Condiţii suficiente, dar nu şi necesare 12
1.6. Tipuri de raţionament 12
1.6.1. Metoda reducerii la absurd 12
1.6.2. Inducţia matematică 13

2. Numere reale 14
2.1. Reprezentarea numerelor raţionale pe o axă de coordonate 14
2.2. Puncte iraţionale pe o axă de coordonate 15
2.3. Operaţii cu numere reale 15

2.3.1. Adunarea........15
2.3.2. Înmulţirea........16
2.4. Ordonarea numerelor reale........16
2.5. Axioma lui Arhimede. Partea întreagă a unui număr real........18
2.6. Puteri şi radicali........18
2.6.1. Puteri cu exponent întreg........18
2.6.2. Radicali........19
2.6.3. Puteri cu exponent raţional........20
2.7. Numere zecimale........20
2.7.1. Reprezentarea zecimală a numerelor întregi........20
2.7.2. Compararea numerelor naturale reprezentate zecimal........21
2.7.3. Numere zecimale........21
2.7.4. Reprezentarea numerelor zecimale sub formă de fracţii zecimale finite........21
2.7.5. Compararea a două numere zecimale........21
2.8. Aproximări zecimale ale unui număr real........21
2.8.1. Definiţii........21
2.8.2. Aproximări zecimale........22
2.8.3. Reprezentarea numerelor reale ca fracţii zecimale infinite........22
2.8.4. Reprezentarea numerelor raţionale ca fracţii zecimale infinite........23
2.8.5 Trunchieri, rotunjiri........23

3. Ecuaţii........23
3.1. Ecuaţii de forma $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$........24
3.2. Ecuaţii de forma $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq0$........25
3.2.1. Cazuri particulare ale ecuaţiei de gradul II cu coeficienţi reali........25
3.2.2. Cazul general $ax^2+bx+c=0$........26
3.2.3. Relaţiile lui Viète........26
3.3. Ecuaţii iraţionale........27
3.4. Ecuaţii reductibile la cele studiate anterior........28
3.4.1. Ecuaţii de forma $ax^3+bx^2+cx=0$, $a\neq0$........28

3.4.2. Ecuaţii de forma $ax^3+b=0$, $a\neq0$ 29
3.4.3. Ecuaţii de forma $ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq0$ 29
3.4.4. Ecuaţii cu modul 29

4. Funcţii 30
4.1. Produs cartezian. Reprezentare geometrică 30
4.2. Funcţii - definiţie, exemple, grafice 31
4.2.1. Definiţii 31
4.2.2. Modalităţi de a defini o funcţie 31
4.2.3. Graficul unei funcţii 32
4.3. Variaţia unei funcţii 33
4.4. Funcţia de gradul I 35
4.4.1. Monotonia funcţiei de gradul I 35
4.4.2. Reprezentarea grafică a funcţiei de gradul I 35
4.4.3. Semnul funcţiei de gradul I 36
4.4.4. Funcţia de gradul I pe un interval 36
4.5. Sisteme de ecuaţii de tipul: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 37
4.6. Inecuaţii de forma: $ax+b\leq0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq0$, $ax+b>0$ 37
4.7. Funcţia de gradul al doilea 38
4.7.1. Definiţie. Exemple 38
4.7.2. Funcţia $f(x)=x^2$ 39
4.7.3. Studiul funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ 39
4.8. Inecuaţii de forma $ax^2+bx+c\leq0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq0$ 41
4.9. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii de forma: $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ 41
4.10. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii de forma:
$\begin{cases} mx+n=y,\ m,n\in\mathbb{R} \\ ax^2+bx+c=y,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq0 \end{cases}$ 42
4.11. Sisteme de inecuaţii de tipul celor studiate 42
4.12. Operaţii cu funcţii numerice 43
4.12.1. Adunarea 43
4.12.2. Înmulţirea 44
4.12.3. Compunerea 44

4.12.4. Inversa unei funcţii....................................45
4.13. Exemple de funcţii numerice....................................45
4.13.1. Funcţia radical de ordinul doi....................................45
4.13.2. Funcţia putere....................................45
4.13.3. Funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{1}{x}$....................................46
4.14. Funcţii bijective....................................46
4.15. Funcţii convexe....................................47
4.16. Şiruri numerice. Progresii aritmetice şi progresii geometrice....................................48
4.16.1. Şiruri numerice....................................48
4.16.2. Progresii aritmetice....................................49
4.16.3. Progresii geometrice....................................50
4.17. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică....................................51
4.17.1. Funcţia exponenţială....................................51
4.17.2. Logaritmi. Funcţia logaritmică....................................52
4.18. Ecuaţii exponenţiale şi logaritmice....................................53
4.18.1. Ecuaţii exponenţiale....................................53
4.18.2. Ecuaţii logaritmice....................................53

5. Elemente de combinatorică....................................54
5.1. Probleme de numărare....................................54
5.2. Permutări şi aranjamente....................................55
5.2.1. Permutări....................................55
5.2.2. Aranjamente....................................55
5.3. Combinări....................................56
5.4. Aplicaţii....................................57
5.5. Binomul lui Newton....................................57
5.5.1. Termenul general al binomului lui Newton....................................57
5.5.2. Coeficienţi binomiali. Proprietăţi....................................58

6. Numere complexe....................................59
6.1. Mulţimea numerelor complexe....................................59
6.1.1. Definirea numerelor complexe....................................59
6.1.2. Proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor complexe....................................60
6.2. Forma algebrică a numerelor complexe....................................61

6.2.1. Forma algebrică. Numere complexe conjugate........61
6.2.2. Modulul unui număr complex..................................61
6.3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe........62
6.3.1. Reprezentarea în plan a numerelor complexe..........62
6.3.2. Interpretarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe..62
6.4. Rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali...63
6.5. Forma trigonometrică a unui număr complex................64
6.6. Rădacinile de ordinul n ale unui număr complex...........65
6.6.1. Rădăcinile de ordinul n ale unităţii..........................65
6.6.2. Rădăcinile de ordinul n ale unui număr complex......65

7. Polinoame...66
7.1. Polinoame cu coeficienţi complecşi...............................66
7.1.1. Definiţia polinoamelor cu coeficienţi complecşi.........66
7.1.2. Adunarea şi înmulţirea polinoamelor......................67
7.2. Teorema împărţirii euclidiene pentru polinoame...........68
7.3. Valori numerice ale unui polinom. Rădăcini de polinoame...69
7.3.1. Valori numerice ale unui polinom............................69
7.4. Teorema fundamentală a algebrei (d'Alembert-Gauss)...70
7.4.1. Ecuaţii algebrice..70
7.4.2. Teorema fundamentală a algebrei...........................70
7.5. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi.................................71
7.6. Rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi reali, raţionali, întregi..71
7.6.1. Rădăcinile polinoamelor cu coeficienţi reali.............71
7.6.2. Rădăcinile ale polinoamelor cu coeficienţi raţionali...72
7.6.3. Rădăcini raţionale ale polinoamelor cu coeficienţi întregi...72
7.7. Algoritmul lui Euclid..73

8. Elemente de algebră liniară...73
8.1. Matrice...73
8.1.1. Noţiunea de matrice...73
8.1.2. Adunarea şi scăderea matricelor...............................75

8.1.3. Înmulţirea cu scalari a matricelor........................76
8.1.4. Înmulţirea matricelor........................76
8.1.5. Transpusa unei matrice........................78
8.1.6. Ridicarea la putere a matricelor pătratice........................78
8.2. Determinanţi........................79
8.2.1. Determinant de ordinul doi........................79
8.2.2. Determinant de ordinul trei........................80
8.2.3. Determinant de ordinul patru........................82
8.2.4. Proprietăţile determinanţilor........................82
8.3. Rangul unei matrice. Matrice inversabile........................83
8.3.1. Rangul uni matrice........................83
8.3.2. Matrice inversabile........................84
8.3.3. Ecuaţii matriciale........................85
8.4. Sisteme liniare de m ecuaţii cu n necunoscute, n≤4....85
8.4.1. Metode de rezolvare........................85
8.4.2. Sisteme liniare omogene........................88
8.4.3. Interpretarea geometrică a sistemelor liniare cu două sau trei necunoscute........................88

9. Structuri algebrice........................90
9.1. Relaţii de echivalenţă. Partiţii........................90
9.1.1. Relaţii binare........................90
9.1.2. Relaţii de echivalenţă. Clase de echivalenţă........................91
9.2. Legi de compoziţie........................92
9.2.1. Moduri de definire........................92
9.2.2. Proprietăţi........................93
9.3. Grupuri........................97
9.3.1. Structuri algebrice preliminare: parte stabilă, semigrup, monoid........................97
9.3.2. Grup. Definiţie. Exemple........................99
9.3.3. Reguli de calcul într-un grup........................103
9.3.4. Subgrupuri........................103
9.3.5. Morfisme şi izomorfisme de grupuri........................106
9.4. Inele........................108
9.4.1. Definiţii, exemple........................108
9.4.2. Reguli de calcul într-un inel........................109

9.4.3. Inel integru......110
9.4.4. Caracteristica unui inel......111
9.4.5. Subinele......111
9.5. Corpuri......112
9.5.1. Definiţii, exemple......112
9.5.2. Morfisme şi izomorfisme de inele şi corpuri......113
9.6. Spaţii vectoriale......115
9.6.1. Definiţii, exemple......115
9.6.2. Reguli într-un spaţiu vectorial......116
9.6.3. Bază......116

Bibliografie......117

1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Enunț. Propoziție. Valoare de adevăr

Convenim să considerăm că noțiunea de **enunț** este o noțiune primară, adică o noțiune pe care nu o putem defini cu ajutorul altor noțiuni (la fel sunt noțiunile de punct, dreaptă și plan din geometrie).

Considerăm, în general, că un enunț este un ansamblu de semne cărora li s-a dat un sens.

Definiție: *Se numește **propoziție** (în sensul logicii matematice) un enunț despre care putem decide dacă este adevărat sau fals.*

Observații: 1. Noțiunile de adevăr sau fals convenim să le considerăm noțiuni fundamentale (primare).
2. Prin "adevărat ori fals" înțelegem că fiecare propoziție are una din aceste calități dar nu le are pe ambele simultan.
3. Logica matematică se mai numește și **logică bivalentă**.
4. Notăm propozițiile cu p, q, r, s... sau cu p_1, p_2, p_3....

Fiecărei propoziții îi putem asocia atributul "adevărat" sau "fals".

Dacă o propoziție este adevărată atunci **valoarea de adevăr** a ei este "adevărul" și vom nota valoarea de adevăr în acest caz prin semnul "1" (sau "a"), iar dacă propoziția este falsă **valoarea ei de adevăr** este "falsul" și este notată prin "0" (sau "f").

Observație: În acest caz "0" și "1" sunt simboluri fără înțeles numeric.

Notație: Notăm valoarea de adevăr a propoziției p prin V(p). Dacă p este adevărată atunci V(p)=1, iar dacă este falsă, V(p)=0.

Propozițiile se pot compune cu ajutorul **operatorilor (conectorilor) logici**, iar rezultatele vor fi propoziții din ce în ce mai complexe.

1.2. Operații logice elementare

1.2.1. Negația propoziției

Definiție: *Fie p o propoziție oarecare. **Negația** propoziției p este propoziția **"non p"** care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată.*

V(p)	V($\rceil$p)
0	1
1	0

Propoziția "non p" se notează cu $\rceil p$ sau $\overline{p}$.

Observație: Dubla negație (negarea negației) a propoziției p are aceeași valoare de adevăr ca și propoziția p.

V(p)	V($\rceil$p)	V($\rceil$($\rceil$p))
0	1	0
1	0	1

1.2.2. *Conjuncția propozițiilor*

Definiție: *Fie p și q două propoziții oarecare.* ***Conjuncția*** *propozițiilor p, q este propoziția* ***„p și q“,*** *notată* p$\wedge$q, *care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și este falsă în celelalte cazuri.*

V(p)	V(q)	V(p$\wedge$q)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.2.3. *Disjuncția propozițiilor*

Definiție: *Fie p și q două propoziții oarecare.* ***Disjuncția*** *propozițiilor p, q este propoziția* ***„p sau q“****, notată p$\vee$q, care este falsă când ambele propoziții sunt false și adevărată în celelalte cazuri.*

V(p)	V(q)	V(p$\vee$q)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

1.2.4. *Implicația propozițiilor*

Definiție: *Fie p și q două propoziții oarecare. Se numește* ***implicație*** *a propozițiilor p, q (în această ordine) propoziția $\rceil$p$\vee$q. Această propoziție se va nota p$\to$q și se citește „p implică q“ sau „dacă p atunci q“.*

În implicația „p$\to$q“, p se numește **ipoteza** sau **antecedentul** implicației, iar propoziția q se numește **concluzia** sau **consecventul** implicației.

V(p)	V($\rceil$p)	V(q)	V(p$\to$q)
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1

Observație: Din tabela valorii de adevăr a propoziției p$\to$q apare următorul paradox: dacă p este falsă, propoziția p$\to$q este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propoziției q. Spunem că „falsul implică orice“.

1.2.5 Echivalența propozițiilor

Definiție: *Fie p și q două propoziții oarecare. Se numește* ***echivalența*** *propozițiilor p, q propoziția $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$. Această propoziție se notează $p\leftrightarrow q$ și se citește „p dacă și numai dacă q".*

V(p)	V(q)	V($\rceil$p)	V($\rceil$q)	V(p→q)	V(q→p)	V(p↔q)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

Observație: Din tabela valorilor se vede că $p\leftrightarrow q$ este adevărată numai atunci când p și q sunt simultan false sau simultan adevărate.

1.2.6. Formule logice

În calculul propozițional, cu literele p,q,r... (sau $p_1,p_2,p_3,\dots$) și cu simbolurile conectorilor logici: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ putem să formăm diverse expresii numite **formule ale calculului propozițional (sau formule logice)**.

Formulele logice le notăm cu α, β, γ, δ etc.

Definiție: *Dacă indiferent de valoarea de adevăr a propozițiilor componente, valoarea de adevăr a formulei logice α este 1, atunci formula se numește* ***lege*** *sau* ***formulă identic adevărată*** *sau* ***tautologie.***

Exemple: 1) $\alpha=p\vee\rceil p$, $V(\alpha)=1 \Rightarrow \alpha$ este o tautologie. Formula $p\vee\rceil p$ se numește **legea terțului exclus.**

2) $\beta = p\wedge\rceil p$, $V(\beta)=0 \Rightarrow \beta$ este întotdeauna falsă. Ea se numește **principiul contradicției.**

Definiție: *Formulele α și β formate din aceleași litere $p_1, p_2, \dots, p_n$ se numesc* ***echivalente*** *dacă pentru orice înlocuire a literelor $p_1, p_2, \dots, p_n$ cu propoziții se obține $V(\alpha)=V(\beta)$.*

Echivalența formulelor se notează cu $\alpha\Leftrightarrow\beta$ sau $\alpha\equiv\beta$.

Reguli de negație *(legile lui de Morgan):*

1. $\rceil(p\vee q) \Leftrightarrow \rceil p\wedge\rceil q$
2. $\rceil(p\wedge q) \Leftrightarrow \rceil p\vee\rceil q$

1.3. Predicat. Cuantificatori

1.3.1. Definiția noțiunilor de predicat și cuantificator

Definiție: *Se numește **predicat** un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și are proprietatea că, pentru orice valori admisibile date variabilelor, devine o propoziție.*

Clasificare (după numărul de variabile pe care le conțin):
- predicate **unare,** care depind de o singură variabilă; se notează $p(x)$
- predicate **binare,** care depind de două variabile; se notează $p(x,y)$ sau $p(x_1,x_2)$
- predicate **ternare,** care depind de trei variabile
- predicate **n-are,** care depind de n variabile. Se notează $p(x_1, x_2,.. x_n)$.

Pentru a putea defini corect un predicat este necesar să precizăm de fiecare dată valorile pe care le pot lua variabilele. Mulțimea acestor valori o vom numi **mulțime de definiție.**

Definiție: *Fie un predicat unar p(x), unde x este un element oarecare dintr-o mulțime dată E. Propoziția: **„există cel puțin un x din E astfel încât p(x)"** se numește **propoziție existențială.***

Această propoziție se notează „$(\exists x)$, $x\in E$, $p(x)$" sau „$\exists x\in E$, $p(x)$". Cuantificatorul „există" notat cu $\exists$ se numește **cuantificator existențial**. Propoziția existențială este adevărată când există cel puțin un x_o din E astfel încât $p(x_o)$ este adevărată și este falsă când nu există nici un x_o din E astfel încât $p(x_o)$ să fie adevărată.

Definiție: *Fie un predicat unar p(x), unde x este un element oarecare dintr-o mulțime dată E. Propoziția: **„oricare ar fi x din E, p(x)"** se numește **propoziție universală.***

Propoziția universală se notează „$(\forall x)$, $x\in E$, $p(x)$" sau „$\forall x\in E$, $p(x)$". Cuantificatorul „oricare ar fi" (sau „pentru orice") notat cu $\forall$ se numește **cuantificator universal.**

Propoziția universală este adevărată dacă pentru orice $x\in E$, $p(x)$ este adevărată și este falsă dacă există cel puțin un $x_0\in E$ astfel încât $p(x_0)$ este falsă.

1.3.2. Reguli de negație

Negația propoziției existențiale:	*Negația propoziției universale:*
$\rceil(\exists x\in E,\ p(x)) \Leftrightarrow (\forall x\in E,\ \rceil p(x))$	$\rceil(\forall x\in E,\ p(x)) \Leftrightarrow (\exists x\in E,\ \rceil p(x))$

1.3.3. Predicate unare

Definiție: *Predicatul $q(x)$ se numește **consecință logică** a predicatului $p(x)$ și se scrie $p(x) \Rightarrow q(x)$ dacă propoziția $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$ este adevărată.*

Definiție: *Predicatele $p(x)$ și $q(x)$ se numesc **echivalente** și se scrie $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă propoziția $(\forall x)(p(x) \leftrightarrow q(x))$ este adevărată.*

Observații: 1. $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ dacă pentru orice valoare x_0 a variabilei x propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ au aceeași valoare de adevăr.

2. $\rceil(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \rceil q(x))$, adică, pentru a infirma o implicație care conține cuantificatorul $\forall$ se construiește un **contraexemplu.**

1.3.4. Predicate binare

Predicatele binare sunt predicate ce depind de două variabile și se notează cu $p(x,y)$ sau $p(x_1,x_2)$.

Dintr-un predicat binar se pot obține cu ajutorul cuantificatorilor $\exists$ și $\forall$ predicate unare astfel: dacă $x \in E_1$, $y \in E_2$, atunci se pot forma predicatele: $(\exists x)p(x,y)$, $(\forall x)p(x,y)$, $(\exists y)p(x,y)$, $(\forall y)p(x,y)$.

În primele două predicate y este o **variabilă liberă**, iar în ultimele două x este o variabilă liberă.

Se constată că:

a) $(\forall x)(\forall y)p(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)p(x,y)$

b) $(\exists x)(\exists y)p(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)p(x,y)$ (cuantificatorii de același fel comută)

c) în general $(\exists x)(\forall y)p(x,y) \not\Leftrightarrow (\forall y)(\exists x)p(x,y)$ (în general, cuantificatorii care nu sunt de același fel nu comută).

Reguli de negație:

a) $\rceil((\exists x)(\forall y)p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\rceil p(x,y)$

b) $\rceil((\forall x)(\exists y)p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\rceil p(x,y)$

1.4. Corelarea elementelor de logică matematică cu relații și operații cu mulțimi

1.4.1. Mulțimi

Definiție ***(dată de Cantor):*** *O mulțime este o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și bine distincte.*

Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele se notează cu litere mici. Dacă A mulțime și a un element al ei putem enunța propoziția „a aparține lui A" și să scriem $a \in A$.
$\rceil(a \in A) \Leftrightarrow a \notin A$

Relatia de incluziune

Fie A și B două mulțimi. Dacă $x \in B \Rightarrow x \in A$, atunci **mulțimea B este inclusă în mulțimea A (sau B este submulțime a lui A)** și scriem $B \subseteq A$.
$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$
Dacă $\exists x_0 \in B$ astfel încât $x_0 \notin A$, atunci B nu este inclusă în A și scriem $B \not\subset A$.

Relatia de egalitate

Definiție: *Două mulțimi sunt **egale** dacă sunt formate din aceleași elemente.*

În limbajul logicii avem: $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
Un predicat unar p(x) definește o mulțime și anume mulțimea A, pentru care predicatul $x \in A$ este echivalentul cu predicatul p(x): $x \in A \Leftrightarrow p(x)$. Scriem $A = \{x | p(x)\}$.

Definiție: *Predicatul $x \neq x$ definește mulțimea $\{x | x \neq x\}$ care se numește **mulțimea vidă** sau mulțimea care nu are nici un element și se notează cu $\varnothing$.*

1.4.2. Operații cu mulțimi

Fie A și B două mulțimi.

Reuniunea

Definiție: *Se numește **reuniunea** a două mulțimi A și B mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B.*

În termenii logicii matematice, reuniunea mulțimilor A și B, notată cu $A \cup B$, este definită de predicatul $x \in A \vee x \in B$
$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$; $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Intersectia

Definiție: *Se numește **intersecția** a două mulțimi A și B mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui B.*

Intersecția mulțimilor A și B se notează $A \cap B$.
$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$
Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci mulțimile A și B se numesc **mulțimi disjuncte.**

Diferența

Definiție: *Se numește **diferența** dintre mulțimea A și mulțimea B mulțimea formată din elementele lui A care nu sunt elemente ale lui B. Diferența se notează cu A-B sau A\B.*

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

Complementara

Definiție: *Fie E o mulțime și A o submulțime a lui E. Se numește **complementara lui A în raport cu E** submulțimea lui E formată din acele elemente care nu aparțin lui A. Se notează $C_E A$.*

$C_E A = E \setminus A$
$C_E A = \{x | x \in E \wedge x \notin A\}$

Produsul cartezian

Definiție: *Se numește **pereche ordonată (cuplu)** formată din elementele x și y o ordine între elementele x și y în sensul că x este primul element, iar y este al doilea element și se notează cu (x,y).*

În perechea (x,y) x se mai numește **prima componentă**, iar y **a doua componentă**.
Două perechi (x,y) și (x',y') sunt egale $\Leftrightarrow$ x=x' și y=y'.
$(x,y)=(y,x) \Leftrightarrow x=y$. În general $(x,y) \neq (y,x)$.

Definiție: *Fie A și B două mulțimi. Mulțimea ale cărei elemente sunt toate perechile ordonate (a,b), în care $a \in A$ și $b \in B$ se numește **produsul cartezian** al mulțimilor A și B (în această ordine) și se notează AxB.*

$AxB = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}$
Dacă A=B se notează $AxA = A^2$